Noche de las Estrellas
2021: Armonía y Revolución

ARTÍCULO DE DIVULGACIÓN DE LA CIENCIA

La elipse

Alberto Rincón Galeana
Facultad de Ciencias, UNAM
Nahiely Flores Fajardo
Noche de las Estrellas

Cuando hablamos de Johannes Kepler inmediatamente pensamos en la revolución que en el conocimiento cuando planteó que el camino que siguen los planetas alrededor del Sol no es un círculo perfecto sino una elipse. Y ¿qué es eso de la elipse? Intuitivamente, una elipse es una figura geométrica plana que se asemeja a un óvalo. Podemos pensar que es una generalización de la circunferencia, pues ésta puede definirse como “el conjunto de puntos en un plano que están a una misma distancia dada (el radio) de un punto dado (el centro)”. Mientras que, la elipse corresponde al conjunto de puntos en el plano tal que dados dos puntos fijos (los llamaremos “focos”) la suma de distancias a los respectivos focos es constante. Así, una circunferencia es una elipse en la que los focos coinciden.

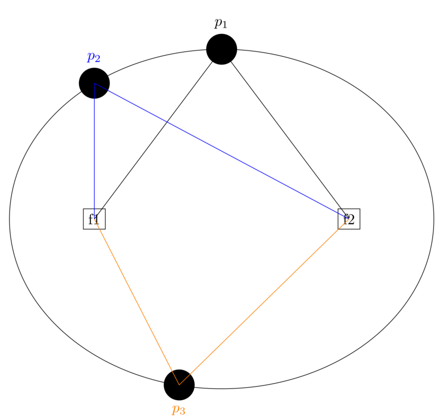


Ilustración de una elipse en la que se muestran los dos focos, f1 y f2, así como tres puntos diferentes sobre la elipse p1, p2 y p3, mostrando que la suma de distancias a los focos desde un punto, cualquiera que éste sea, es constante.

Ahora bien, la definición de la elipse que acabamos de dar es relativamente moderna, pero esta figura geométrica se conoce desde los antiguos griegos, para ellos era una sección cónica, es decir, un “pedacito” muy particular de un cono. La elipse no fue la única sección cónica que estudiaron, también estudiaron la parábola, la circunferencia y la hipérbola. El estudio de estas secciones cónicas fue motivado por el problema de “la duplicación del cubo”, uno de los problemas que más ocupó el pensamiento de los antiguos griegos: dado un cubo, construir otro cubo de exactamente el doble de volumen que el primero.

Imaginemos pues un cono de base circular, como en el que vienen los helados. Si cortamos el cono con un plano paralelo a su base circular la figura del “corte” será un círculo perfecto más pequeñito que la base. En cambio, si cortamos el cono con un plano perpendicular a la base, la figura que tendremos será una hipérbole. Si ahora lo cortamos con un plano en cualquier otro ángulo obtendremos una elipse, como se muestra en las siguientes figuras. Como podrá imaginarse el lector, el segundo dibujo es el cono cortado por el plano visto desde arriba y en el tercero (derecha) es el cono cortado por el plano visto desde adentro del cono.

La elipse parece una figura geométrica muy sencilla, en algunos casos, como por ejemplo cuando se calcula su área (el espacio que está contenido dentro de la curva) así es, pero en otros, como en el cálculo de su perímetro (la longitud de la curva) no lo es de hecho, está sumamente lejos de serlo.

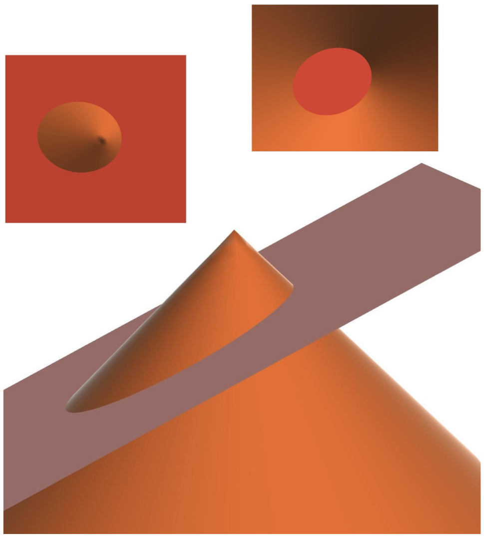
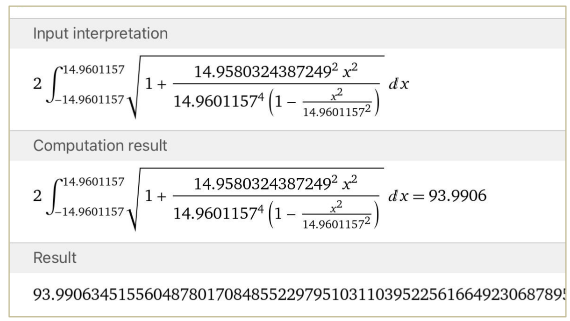


Ilustración de una elipse como un corte del cono, es decir, como una cónica. En el centro se muestra el cono completo y el corte que produce la elipse. Arriba a la izquierda el corte visto desde arriba y arriba a la derecha, el corte visto desde abajo.

Recordando que, en el plano la ecuación que describe una circunferencia centrada en el origen, de radio r, es $x^2 + y^2 = r^2$, tenemos que el área comprendida dentro de dicho círculo es $A_{círculo} = \pi r^2$. Consideremos ahora una elipse cuyo semieje mayor (lado más grande del óvalo) vale a y semieje menor (lado más pequeño del óvalo) vale b y que se encuentra descrita por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Su área entonces estará dada por la fórmula $A_{elipse} = \pi ab$ y, en el caso particular en el que $a = b$ entonces tendremos un círculo y regresaremos a las ecuaciones que describen a la circunferencia.

Kepler encontró la aplicación de la elipse para describir los caminos de los planetas alrededor del Sol y aunque el área de una elipse, como pudimos observar anteriormente, es sencilla de calcular, el perímetro no es sencillo en absoluto. De hecho, no se puede calcular mediante ninguna fórmula, es por eso que el perímetro de la elipse no es de los que nos enseñan en la primaria, ¿te habías dado cuenta? Aún así, Kepler trabajó arduamente y ajustó las órbitas de los planetas conocidos con esta curva. Una de las implicaciones y complicaciones de esto es que la distancia entre un planeta y el Sol no es una única, sino que toma diferentes valores dependiendo de la época del año. Cuando la Tierra se encuentra en su punto más lejano, solsticio de verano en México, la distancia al Sol es de 152,097,701 km y cuando se encuentra en su punto más cercano, solsticio de invierno en México, la distancia es de 147,104,613 km. Pero ninguna de estas dos medidas corresponde a los semiejes mayor o menor de la elipse, entonces aún no se puede caracterizar la órbita. Pero, sí se pueden deducir y a partir de ello tratar de realizar una aproximación mediante programas computacionales avanzados de matemáticas que obviamente no existían en el S. XVII cuando Kepler hizo su análisis. Esta aproximación a nosotros nos da una distancia de 939,906,345.15 km que no está nada mal si tomamos en cuenta que algunas fuentes dan una longitud de 940 millones de kilómetros.



Input interpretation

$$2\int_{-14.9601157}^{14.9601157} \sqrt{1 + \frac{14.9580324387249^2\, x^2}{14.9601157^4 \left(1 - \frac{x^2}{14.9601157^2}\right)}}\, dx$$

Computation result

$$2\int_{-14.9601157}^{14.9601157} \sqrt{1 + \frac{14.9580324387249^2\, x^2}{14.9601157^4 \left(1 - \frac{x^2}{14.9601157^2}\right)}}\, dx = 93.9906$$

Result

93.990634515560487801708485522979510311039522561664923068789

Resultado de la aproximación a la solución de la integral para obtener la longitud total de la órbita de la Tierra mediante el uso de un programa avanzado para cálculos matemáticos.

Hoy en día la elipse tiene múltiples aplicaciones en la vida cotidiana y la podemos encontrar en muchas partes alrededor. Por ejemplo, el balón con el que se juega futbol americano tiene forma de elipse. El diseño elíptico también es recurrente en los muebles, por ejemplo, para fabricar mesas elípticas como escritorios de oficinas o bien como mesas grandes para juntas. En arquitectura, los edificios con bóvedas acústicamente son muy importantes ya que, el sonido que se emite en uno de los costados de la sala, se "refleja" llegando hasta el otro lado de la sala aún cuando éste sea sólo un susurro. Uno de los cortes más usados para piedras preciosas de anillos, aretes o dijes es un corte oval, es decir, con forma de elipse. Cuando cortamos las zanahorias y los pepinos "de ladito", es decir, en un plano ni paralelo ni perpendicular al eje mayor de la verdura, la figura que se forma es una elipse. Y si quieres hacer bizcos cuando tomes agua en un vaso circular verás que, cuando lo inclines para darle un trago, la superficie del agua formará también una elipse.

Si quiere conocer los detalles de los cálculos de áreas y perímetros, aunque no son sencillos, los mostramos en anexo.

Área

Recordemos que el área de una circunferencia de radio 1 está dada por la fórmula πr^2 que en este caso es π. Así pues, recordando que en el plano, la ecuación de una circunferencia centrada en el origen y de radio uno es $x^2 + y^2 = 1$, tenemos que el área comprendida dentro de la gráfica de esta circunferencia es pi o bien $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ dx = \pi$. Consideremos ahora una elipse cuyo semieje mayor vale a y el semieje menor b, para efectos de calcular su área, podemos tomar la elipse centrada en el origen, así pues, su ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Queremos encontrar el valor numérico de $2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx = 2b\ \int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx$.

Ahora bien, usando la siguiente propiedad de las integrales: $\int_{-ca}^{ca} f(x)dx = c\ \int_{-a}^{a} f(cx)dx$, tenemos que:

$2b\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ dx = 2ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\frac{(ax)^2}{a^2}}\ dx = 2ab\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx = 2ab\,\frac{\pi}{2} = \pi ab.$

Es decir, el área de una elipse cuyo semieje mayor mide a, semieje menor b es πab. Observemos que en una circunferencia, si definiéramos semieje mayor y semieje menor, ambos serían el radio, y la fórmula resulta siendo la vieja conocida πr^2.

Perímetro de la órbita terrestre

Sabiendo que la distancia mínima de la Tierra al Sol es de unos $147{,}104{,}613\ km$. la máxima distancia es de unos $152{,}097{,}701\ km$, que la órbita es elíptica y que el Sol es uno de los focos de la elipse (órbita), por la definición de la elipse, tenemos que la distancia focal (distancia entre los dos focos) es de $152{,}097{,}701 - 147{,}104{,}613 = 4{,}993{,}088\ km$.

Nuevamente, por la definición de la elipse, tenemos que el eje mayor mide el promedio entre la distancia máxima y la mínima de la Tierra al Sol: $a = \frac{(152{,}097{,}701+147{,}104{,}613)}{2} = 149{,}601{,}157\ \mathrm{km}$

Así, recordemos que en una elipse de semieje mayor ay semieje menor b, centrada en el origen, tenemos la identidad $a^2 = b^2 + c^2$ siendo $2c$ la distancia focal.

Por lo tanto, $c = {}^{4{,}993{,}088}/_{2} = 2{,}496{,}544\ km$. Conociendo a y c podemos conocer b: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 149{,}580{,}324.387\ km$ aproximadamente.

Conociendo a y b podemos encontrar la ecuación de la órbita, para simplificar los cálculos, dividiremos todos los datos encontrados entre $1{,}000{,}000 = 1 \times 10^6$.

Despejando y en términos de x, tenemos que $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ así que tomando (como es costumbre) $y = f(x)$, tenemos que su derivada es:

$$f'(x) = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

Luego, la órbita terrestre puede encontrarse calculando:

$$p_{Tierra} = 2 \times 10^6 \int_{-14.9691157}^{14.9691157} \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^4(1-\frac{x^2}{a^2})}}\,dx$$

Integral que no tiene solución analítica y es necesario aproximarla mediante programas matemáticos.